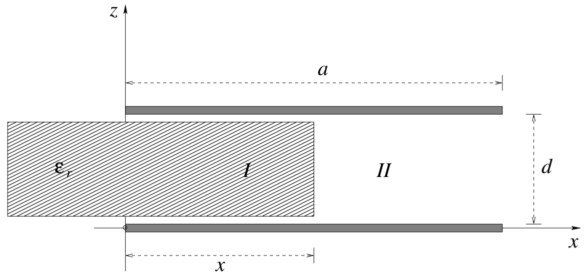
ELEKTRODYNAMIK IN MEDIEN

Zur Erinnerung: die elektrische Verschiebungsdichte ist definiert als $\vec{D} = \epsilon\,\vec{E} = \epsilon_0\,\vec{E} + \vec{P}$, wobei $\vec{P}$ die Polarisationsdichte und im Gauß-System $\epsilon_0 = (4\pi)^{-1}$ ist.

[P29] *Plattenkondensator*

Ein Plattenkondensator mit Fläche $A = a \cdot b$ und Abstand d sei zu einem Teil mit einem Material mit elektrischer Permeabilität $\epsilon = \epsilon_r\,\epsilon_0 = \epsilon_r/(4\pi)$ gefüllt. Die Felder in der gefüllten und der ungefüllten Region seien mit Indizes I und II bezeichnet, siehe Skizze. Randeffekte werden vernachlässigt, d.h. die Felder in den Regionen I und II dürfen als konstant und allein in z-Richtung zeigend angenommen werden.



Bevor wir diese Situation behandeln, beginnen wir mit einer vereinfachten Situation. Wir betrachten zwei ideal leitende Platten, die parallel zur xy-Ebene im Abstand h zueinander liegen. Wir nehmen die Platten als unendlich ausgedehnt an, so dass wir Randeffekte vernachlässigen können. Die Platten seien mit Flächenladungsdichten ω und $-\omega$ entgegengesetzt aufgeladen.

(a) Geben Sie für die vereinfachte Konfiguration das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ in allen drei Raumbereichen an.

(b) Geben Sie die Kapazität des Kondensators pro Einheitsfläche an.

(c) Zwischen die Platten, und parallel zu ihnen, wird eine Schichte der Dicke $d \leq h$ eingebracht, die ein Dielektrikum mit elektrischer Permeabilität $\epsilon = \epsilon_r\,\epsilon_0 = \epsilon_r/(4\pi)$ ist. Geben Sie nun das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ überall im Innern des Kondensators an. Was gilt an den Grenzflächen zum Dielektrikum?

(d) Was ergibt sich nun für die Kapazität des Kondensators pro Einheitsfläche?

(e) Wir wenden uns nun der komplizierten Situation der Skizze zu, wobei nun $d = h$ ist. Begründen Sie, warum auf den Platten das Potential konstant ist. Verwenden Sie dies, um E_I, E_{II}, D_I und D_{II} in Abhängigkeit der Spannung U anzugeben.

(f) Leiten Sie daraus die Oberflächenladungsdichten ω_I und ω_{II} her.

(g) Die Platten werden mit der Ladung Q bzw. $-Q$ aufgeladen. Begründen Sie, warum

$$Q = \omega_I\,x\,b + \omega_{II}\,(a - x)\,b$$

gelten muss. Bestimmen Sie anhand der vorigen Ergebnisse die Kapazität C des Kondensators.

(h) Berechnen Sie, für gegebene Ladung Q wie in (g), die im Kondensator gespeicherte Energie $W(x)$. Bestimmen Sie abschließend daraus die Kraft, die auf das Dielektrikum wirkt.

(i) Deuten Sie die Konfiguration in der Skizze als Parallelschaltung zweier Kondensatoren, einer ohne und einer mit Dielektrikum.

[P30] *Dielektrische Kugel im homogenen elektrischen Feld*

Eine Kugel mit elektrischer Permeabilität ϵ_i und Radius R befinde sich mit ihrem Mittelpunkt im Ursprung in einem Dielektrikum mit elektrischer Permeabilität ϵ_a. Es gebe ein externes elektrisches Feld, das weit weg von der Kugel homogen sei, $\vec{E}_a(\vec{r}) \approx \vec{E}_\infty = E_\infty\,\vec{e}_z$ für $r \gg R$. Hierbei ist E_∞ konstant.

(a) Folgern Sie Bedingungen an die Potentiale $\phi_i(\vec{r})$ und $\phi_a(\vec{r})$ für $r = R$ aus der Tatsache, dass die Normalkomponenten der dielektrischen Verschiebung $\vec{D}(\vec{r})$ sowie die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes $\vec{E}(\vec{r})$ übereinstimmen müssen.

(b) Nehmen Sie an, dass die Polarisierung der Kugel bewirkt, dass diese das äußere elektrische Feld $\vec{E}_a$ mit dem Feld eines Dipols stört. Machen Sie einen entsprechenden Ansatz für $\phi_a(\vec{r})$, $r > R$.

(c) Versuchen Sie zu begründen, warum der Ansatz $\vec{E}_i(\vec{r}) = \vec{E}_0$, wobei $\vec{E}_0$ konstant ist, sinnvoll ist.

(d) Berechnen Sie aus den Anschlussbedingungen bei $r = R$ das konstante elektrische Feld $\vec{E}_0$ im Innern und das Dipolmoment für das äußere elektrische Feld.

(e) Was ergibt sich für eine dielektrische Kugel im Vakuum, also für $\epsilon_a = \epsilon_0 = 1/(4\pi)$, $\epsilon_i = \lambda\,\epsilon_0$?

(f) Was ergibt sich für $\epsilon_a = \epsilon_0$, wenn die elektrische Permeabilität der Kugel unendlich groß wird, $\epsilon_i = \lambda\,\epsilon_0 = \lambda/(4\pi)$ mit $\lambda \to \infty$? *Hinweis*: Die dielektrische Verschiebung $\vec{D}_i$ bleibt endlich.